Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Partiel du 19 octobre 2013, Correction

Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Questions de cours.

(a) Donner la définition d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.

(b) Écrire la formule du binôme de Newton. On rappelle que les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.

Solution :

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}.$$

Exercice 1. On rappelle que la forme *algébrique* ou *cartésienne* d'un nombre complexe z est son écriture sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b désignent deux nombres réels.

(a) Exprimer les racines 3-ièmes de l'unité sous formes exponentielle et algébrique.

Solution : Les racines 3-ièmes de l'unité sont $e^{\frac{\mathrm{i}0\cdot 2\pi}{3}}$, $e^{\frac{\mathrm{i}1\cdot 2\pi}{3}}$ et $e^{\frac{\mathrm{i}2\cdot 2\pi}{3}}$ ou

$$\left\{e^{0i}, e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}, e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}\right\}.$$

Ce qui donne sous forme algébrique : $1, \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, ou encore,

$$\left\{1, \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

(b) Exprimer les racines 3-ièmes de $2+2\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

Solution : Tout d'abord on remarque $2+2\mathrm{i} = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{8}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$. Donc une racine 3-ième est donnée par $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$. Finalement les racines 3-ièmes de $2+2\mathrm{i}$ sont $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}e^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}e^{\frac{\mathrm{i}4\pi}{3}}$, ou encore,

$$\left\{\sqrt{2}e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{9\pi\mathrm{i}}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{17\pi\mathrm{i}}{12}}\right\}.$$

(c) Trouver une racine 3-ième de $2+2\mathrm{i}$ qui s'écrive simplement sous la forme algébrique $a+\mathrm{i}b$. Déduire de ce qui précède les formes algébriques des autres racines 3-ièmes de $2+2\mathrm{i}$.

Solution : On remarque que $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}9\pi}{12}}$ se simplifie en $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}3\pi}{4}}$ qui s'écrie simplement

$$-1+\mathrm{i}$$

sous forme algébrique.

L'ensemble des racines 3-ièmes de $2+2\mathrm{i}$ est alors égal à

$$\left\{(-1+\mathrm{i})e^{0i}, \quad (-1+\mathrm{i})e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}, \quad (-1+\mathrm{i})e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}\right\}$$

ou $-1+\mathrm{i}$, $(-1+\mathrm{i})\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(-1+\mathrm{i})\left(\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$ ou encore

$$\left\{-1+\mathrm{i}, \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}.$$

(d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
Solution : On remarque $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{\frac{i9\pi}{12}}e^{\frac{i2\cdot 2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{2}$. On en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(e) Exprimer $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
Solution : On a d'une part $e^{i2\alpha} = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$ et d'autre part $e^{i2\alpha} = (e^{i\alpha})^2 = (\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^2 = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 + 2i\cos(\alpha)\sin(\alpha)$. On en déduit par identification que

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha).$$

(f) Linéariser $\cos^3\alpha$.
Solution : En utilisant la formule d'Euler on obtient

$$\cos^3(\alpha) = \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3$$

Puis on développe à l'aide du binôme de Newton, ce qui donne

$$\cos^3(\alpha) = \frac{e^{3i\alpha}+3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}+e^{-3i\alpha}}{8}$$

Et appliquant à nouveau la formule d'Euler, on trouve

$$\cos^3(\alpha) = \frac{\cos(3\alpha)+3\cos(\alpha)}{4}.$$

(g) Vérifier les formules des points (e) et (f) pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$.
Solution :

(e) $\sin\left(2\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.
(f) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}\sqrt{3}+1}{16\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}+5}{8\sqrt{2}}$ et $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}}}{4} = \frac{3\sqrt{3}+5}{8\sqrt{2}}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z^2 + 2iz - 2i$.

(a) Soit w un nombre complexe. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ où l'inconnue est z. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Solution : On cherche à résoudre $z^2 + 2iz - 2i = w$; or

$$z^2 + 2iz - 2i = w \Leftrightarrow z^2 + 2iz - (2i + w) = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à $\Delta = (2i)^2 + 4(2i + w) = -4 + 8i + 4w$. Donc il y a une unique solution à l'équation lorsque $\Delta = 0$ c'est à dire $w = 1 - 2i$. Sinon lorsque $w \neq 1-2i$ il y a deux solutions. Par conséquent l'application est surjective (car il y a toujours au moins une solution) mais pas injective (car il y en a plusieurs dès que $w \neq 1 - 2i$) et donc pas bijective.

(b) Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 + (2i - 1)z - 2i = 0.$$

Solution : Le discriminant est égal à $(2i - 1)^2 + 8i = -3 + 4i$. Il faut chercher une racine du discriminant. Pour cela on cherche x et y tel que $(x + iy)^2 = -3 + 4i$ et $|x + iy|^2 = |-3 + 4i|$, ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = 4 \end{cases}.$$

Les racines de Δ sont donc $1 + 2\mathrm{i}$ et $-1 - 2\mathrm{i}$. Les solutions de l'équation sont alors

$$\frac{(1 - 2\mathrm{i}) + (1 + 2\mathrm{i})}{2} \text{ et } \frac{(1 - 2\mathrm{i}) - (1 + 2\mathrm{i})}{2}$$

c'est-à-dire

$$1 \text{ et } -2\mathrm{i}.$$

(c) En déduire l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}$ des points fixes de f.
Solution :

$$f(z) = z \Leftrightarrow z^2 + 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} = z \Leftrightarrow z^2 + (2\mathrm{i} - 1)z - 2\mathrm{i} = 0.$$

D'après la question précédente

$$A = \{1, -2\mathrm{i}\}.$$

Soit $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $g(z) = \mathrm{i}z - \mathrm{i} + 1$.

(d) Montrer que g est bijective et déterminer la bijection réciproque g^{-1}.
Solution : Soit $w \in \mathbb{C}$. On cherche à résoudre $g(z) = w$; or

$$g(z) = w \Leftrightarrow \mathrm{i}z - \mathrm{i} + 1 = w \Leftrightarrow \mathrm{i}z = w + \mathrm{i} - 1 \Leftrightarrow z = \frac{w + \mathrm{i} - 1}{\mathrm{i}}.$$

Ainsi chaque nombre complexe w a un unique antécédent par g, précisément $\frac{w+\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}}$. Par suite g est bijective et $g^{-1}(w) = \frac{w+\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}w + 1 + \mathrm{i}$.

(e) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(A)$.
Solution :

$$g^{-1}(A) = \{g^{-1}(1), g^{-1}(-2\mathrm{i})\} = \left\{\frac{1 + \mathrm{i} - 1}{\mathrm{i}}, \frac{-2\mathrm{i} + \mathrm{i} - 1}{\mathrm{i}}\right\} = \{1, -1 + \mathrm{i}\}$$

(f) Donner une interprétation géométrique de l'application g : est-ce une translation, une rotation, une homothétie ? Justifier votre réponse.
Solution : L'application g est une similitude directe de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 1$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, donc d'après le cours c'est une rotation de centre 1, car 1 est un point fixe de g étant donnée la question précédente. Comme $a = \mathrm{i} = e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2}}$, l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$.

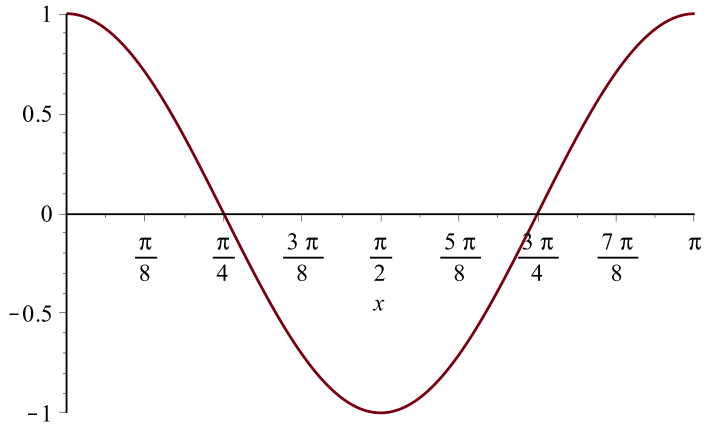
Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos(2x)$.

(a) Décrire les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{0\})$.
Solution : $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(2x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$. Donc,

$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1] \qquad f^{-1}(\{0\}) = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Soit $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \cos(2x)$, la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

(b) Etudier les variations de la fonction g et en dresser le tableau de variations.
Solution : On a $g'(x) = -2\sin(2x)$, donc si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g'(x) \leq 0$ et si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $g'(x) \geq 0$. De plus $g(0) = 1$, $g(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $g(\pi) = 1$, d'ou la représentation graphique suivante :



(c) Décrire les ensembles $g([0, \frac{\pi}{2}])$ et $g^{-1}(\{0\})$.
Solution : D'après l'étude menée à la question précédente on a $g([0, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$. L'ensemble $g^{-1}(\{0\})$ correspond aux zéros de f dans $[0, \pi]$. D'après a), il s'agit de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Soient maintenant E, F deux ensembles, A, B, deux parties de E, et $h\colon E \to F$ une application.

(d) Montrer que $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$.
Solution : Soit $y \in h(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $h(x) = y$. Comme $a \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$, on en déduit $y \in h(A)$ et $y \in h(B)$, c'est à dire $y \in h(A) \cap h(B)$. L'inclusion souhaitée est donc bien prouvée.

(e) Calculer $g^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ et en déduire deux intervalles I, $J \subset [0, \pi]$ tels que $g(I \cap J) \neq g(I) \cap g(J)$.
Solution : Grâce à l'étude de g on en déduit que

$$g^{-1}([0, \tfrac{1}{2}]) = [\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{4}] \cup [\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{6}].$$

Si on pose $I = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ et $J = [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}]$, il est clair que d'une part $I \cap J = \emptyset$ et que donc $g(I \cap J) = \emptyset$ et que d'autre part d'après ce qui précède $g(I) = g(J) = [0, \frac{1}{2}]$ et que donc

$$g(I \cap J) = \emptyset \neq [0, \tfrac{1}{2}] = g(I) \cap g(J).$$